

Kada ALLAB

# ÉLÉMENTS D'ANALYSE

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

1<sup>re</sup> & 2<sup>e</sup> ANNÉES D'UNIVERSITÉ

TOME 2

ÉCOLES SCIENTIFIQUES

*Office des Publications Universitaires*

# Table des Matières

## Tome 2

<b>XI. — Calcul des primitives</b> .....	11
11.1. Tableau des primitives usuelles .....	12
11.2. Changement de variables et intégration par parties dans les intégrales indéfinies .....	12
11.2.1. Changement de variable .....	12
11.2.2. Intégration par parties .....	15
11.3. Primitive d'une fonction rationnelle .....	15
11.4. Primitive d'une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$ .....	19
11.5. Intégration des fractions rationnelles en $e^x$ .....	20
11.6. Intégrales abéliennes .....	21
11.6.1. Recherche des primitives de $\mathbb{R}\left[x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right]$ .....	22
11.6.2. Recherche des primitives de $\mathbb{R}\left[x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right]$ .....	22
11.7. Intégrales du type $\int x^\alpha (Ax^\beta + B)^\gamma dx$ .....	26
<i>Addendum : formes différentielles dans <math>\mathbb{R}</math></i> .....	27
<i>Exercices (5) avec solutions</i> .....	32
 <b>XII. — Intégrales impropres</b> .....	 38
12.1. Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b[$ .....	38
12.2. Propriétés élémentaires de l'intégrale sur $[a, b[$ .....	40
12.3. Convergence des intégrales des fonctions positives .....	41
12.4. Critères de comparaison pour les fonctions positives .....	42
12.5. Critère de convergence de Cauchy .....	47
12.6. Intégrales absolument convergentes. Intégrales semi-convergentes .....	47
12.7. Intégrale sur d'autres types d'intervalles .....	54
12.7.1. Intégrale $\int_a^b f dt$ où $f \in_{\text{loc}} (]a, b])$ , $-\infty \leq a$ .....	54
12.7.2. Intégrale $\int_a^b f dt$ où $f \in_{\text{loc}} (]a, b[)$ , $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ .....	55
12.7.3. Généralisation .....	61
12.8. Changement de variable dans une intégrale impropre .....	63
12.9. Intégration par parties .....	65
12.10. Valeur principale de Cauchy .....	66
<i>Exercices (4) avec solutions</i> .....	67
 <b>XIII. — Séries numériques</b> .....	 70
13.1. Suites de nombres complexes .....	70
13.2. Définitions. Propriétés élémentaires des séries .....	71
13.3. Suites et séries .....	76
13.4. Espace vectoriel des séries numériques .....	77
13.5. Séries absolument convergentes et semi-convergentes .....	79

<b>13.6. Séries à termes positifs</b> .....	80
13.6.1. Condition de convergence .....	81
13.6.2. Règles de comparaison .....	82
13.6.3. Comparaison d'une série à termes positifs avec une série géométrique .....	85
13.6.4. Comparaison avec une intégrale .....	91
13.6.5. Comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ .....	92
13.6.6. Autres critères .....	95
13.7. Séries à termes de signes quelconques .....	98
13.7.1. Règle d'Abel .....	99
13.7.2. Séries alternées .....	100
13.8. Quelques propriétés des séries absolument convergentes et semi-convergentes .....	104
Exercices (2) avec solutions .....	110
<b>XIV. – Suites de fonctions</b> .....	112
14.1. Suites de fonctions .....	112
14.1.1. Convergence simple d'une suite de fonctions .....	112
14.1.2. Convergence uniforme .....	114
14.2. Suites de fonctions continues .....	119
14.3. Suites de fonctions intégrables .....	124
14.4. Approximations .....	126
14.5. Suites de fonctions dérivables .....	130
Exercices (2) avec solutions .....	131
<b>XV. – Séries de fonctions</b> .....	134
15.1. Définitions. Propriétés élémentaires .....	134
15.2. Convergence uniforme .....	137
15.3. Convergence normale .....	139
15.4. Convergence uniforme et propriétés des sommes des séries de fonctions .....	143
15.4.1. Continuité .....	143
15.4.2. Intégration .....	144
15.4.3. Dérivation .....	145
15.5. Séries entières .....	149
15.6. Séries de Taylor .....	159
Exercices (4) avec solutions .....	166
<b>XVI. – Éléments sur les séries de Fourier</b> .....	171
16.1. Séries trigonométriques. Système trigonométrique orthogonal. Séries de Fourier .....	171
16.2. Somme partielle de la série de Fourier. Noyau de Dirichlet .....	175
16.3. Lemme de Riemann .....	176
16.4. Convergence d'une série de Fourier en un point. Principe de localisation .....	177
16.5. Problème de la représentation d'une fonction par sa série de Fourier .....	178
16.6. Développement en série de Fourier des fonctions définies sur un intervalle .....	184
16.7. Séries de Fourier des fonctions paires ou impaires .....	189
16.8. Ordre infinitésimal des coefficients de Fourier .....	192
16.9. Sommation des séries de Fourier au sens de Cesaro. Théorème de Weierstrass .....	193
16.10. Séries de Fourier sous forme complexe .....	199
16.11. Convergence en moyenne des séries de Fourier. Égalité de Parseval .....	201
Exercices (6) avec solutions .....	206



# Table des Matières

## Tome 1

<b>I. — Éléments de la théorie des ensembles</b> .....	13
1.1. <i>Ensembles, opérations élémentaires</i> .....	13
1.1.1. Parties d'un ensemble .....	13
1.1.2. Rappel de logique .....	14
1.1.3. Réunion, intersection .....	15
1.1.4. Ensemble produit .....	15
1.1.5. Partition d'un ensemble .....	16
1.2. <i>Applications</i> .....	16
1.2.1. Définitions .....	16
1.2.2. Applications injective, surjective et bijective .....	17
1.2.3. Image directe et image réciproque d'une partie .....	18
1.3. <i>Relations dans un ensemble</i> .....	19
1.3.1. Relation d'équivalence, ensemble quotient .....	20
1.3.2. Relation d'ordre .....	21
1.4. <i>Dénombrement</i> .....	23
1.4.1. Ensembles finis .....	23
1.4.2. Arrangements .....	24
1.4.3. Permutations .....	24
1.4.4. Combinaisons .....	24
1.5. <i>Puissance des ensembles. Ensembles infinis</i> .....	27
1.5.1. Puissance .....	27
1.5.2. Ensembles infinis .....	27
1.5.3. Comparaison des cardinaux .....	28
<i>Exercices (5) avec solutions</i> .....	32
<b>II. — Structures algébriques</b> .....	38
2.1. <i>Groupes</i> .....	38
2.1.1. Définitions .....	38
2.1.2. Sous-groupe .....	39
2.1.3. Homomorphisme .....	40
2.2. <i>Anneaux</i> .....	40
2.2.1. Définitions .....	40
2.2.2. Calcul dans un anneau .....	41
2.2.3. Éléments particuliers .....	43
2.2.4. Sous-anneau .....	43
2.2.5. Idéal d'un anneau commutatif .....	43
2.3. <i>Corps</i> .....	44
2.3.1. Définitions .....	44
2.3.2. Propriétés .....	44
2.3.3. Valeur absolue .....	45
<i>Exercices (4) avec solutions</i> .....	45
<b>III. — Nombres réels. Nombres complexes</b> .....	49
<i>Introduction</i> .....	49
3.1. <i>Nombres réels</i> .....	50
3.1.1. Définition axiomatique des nombres réels .....	51
3.1.2. Construction de $\mathbb{R}$ .....	52
3.1.3. Quelques propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ .....	63
3.1.4. Nombres algébriques. Nombres transcendants .....	70
3.1.5. Représentation décimale des nombres réels .....	71
3.2. <i>Droite réelle achevée</i> .....	75
3.3. <i>Corps des nombres complexes</i> .....	76
<i>Exercices (3) avec solutions</i> .....	81

<b>IV. — Suites numériques</b> .....	84
4.1. Définitions .....	84
4.2. Suites convergentes .....	85
4.3. Théorèmes sur les suites convergentes .....	89
4.4. Extension aux limites infinies .....	91
4.5. Suites adjacentes .....	92
4.6. Suites récurrentes .....	92
4.7. Suites de Cauchy .....	95
4.8. Théorème de Bolzano-Weierstrass .....	97
4.9. Généralisation de la notion de limite .....	99
Exercices (5) avec solutions .....	103
<b>V. — Fonctions réelles d'une variable réelle</b> .....	109
5.1. Généralités .....	109
5.1.1. Fonction numérique, fonction réelle d'une variable réelle .....	109
5.1.2. Graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle .....	109
5.1.3. Fonctions paire, impaire, périodique .....	110
5.1.4. Fonctions bornées, fonctions monotones .....	110
5.1.5. Opérations algébriques sur les fonctions .....	112
5.2. Limites d'une fonction .....	112
5.2.1. Définitions .....	112
5.2.2. Unicité de la limite .....	113
5.2.3. Limite à droite, limite à gauche .....	114
5.2.4. Cas où $x$ devient infini .....	114
5.2.5. Limite infinie .....	115
5.3. Théorèmes sur les limites .....	115
5.3.1. Relation avec les limites de suites .....	115
5.3.2. Critère de Cauchy pour les fonctions .....	116
5.4. Opérations sur les limites .....	117
5.5. Limite supérieure, limite inférieure .....	120
5.6. Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Notations de Landau .....	126
5.6.1. Définitions : propriétés .....	126
5.6.2. Fonctions équivalentes .....	127
Exercices (2) avec solutions .....	133
<b>VI. — Fonctions continues</b> .....	134
6.1. Définitions .....	134
6.1.1. Fonctions continues en un point .....	134
6.1.2. Fonctions continues sur un intervalle .....	135
6.1.3. Continuité uniforme d'une fonction sur un intervalle .....	135
6.2. Opérations sur les fonctions continues .....	137
6.3. Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé .....	138
6.4. Prolongement par continuité .....	142
6.5. Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle .....	143
6.6. Théorèmes du point fixe .....	146
6.7. Exemple : étude de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .....	150
Exercices (3) avec solutions .....	154
<b>VII. — Fonctions dérivables</b> .....	155
7.1. Définitions, propriétés .....	155
7.1.1. Dérivée d'une fonction en un point .....	155

7.1.2. Dérivée à droite, dérivée à gauche	156
7.1.3. Interprétation géométrique	157
7.1.4. Différentielle	159
7.1.5. Dérivabilité et continuité	160
7.1.6. Dérivée sur un intervalle. Fonction dérivée	160
7.1.7. Opérations sur les fonctions dérivables	162
7.1.8. Maximum, minimum	165
7.2. Théorème de Rolle	166
7.2.2. Théorème des accroissements finis	168
7.2.3. Applications	171
7.2.4. Théorème des accroissements finis généralisés	175
7.3. Formules de Taylor	177
7.3.1. Formules de Taylor	177
7.3.2. Application : recherche d'extrémum	185
7.4. Fonctions convexes	186
7.4.1. Définition	186
7.4.2. Dérivabilité des fonctions convexes	188
7.4.3. Continuité et convexité	191
Exercices (2) avec solutions	193
<b>VIII. — Intégrale de Riemann</b>	197
8.1. Définition de l'intégrale de Riemann	197
8.1.1. Subdivisions	197
8.1.2. Sommes de Darboux	198
8.1.3. Fonctions intégrables. Intégrale de Riemann	202
8.1.4. Théorème de Darboux	203
8.1.5. Sommes de Riemann	208
8.1.6. Intégrale d'une fonction à valeurs complexes	209
8.2. Propriétés de l'intégrale de Riemann	210
8.2.1. Propriétés relatives à l'intervalle de l'intégration	210
8.2.2. Exemples des fonctions intégrables	212
8.2.3. Structure de l'ensemble des fonctions intégrables	215
8.2.4. Propriétés de l'intégrale exprimée par des inégalités	219
8.3. Intégrales et primitives	227
8.3.1. Intégrale fonction de sa limite supérieure (inférieure). Primitives	227
8.3.2. Intégrale indéfinie	231
8.3.3. Formules de la moyenne	233
8.3.4. Procédés généraux d'intégration	238
Exercices (4) avec solutions	247
<b>IX. — Fonctions élémentaires</b>	252
9.1. Fonction logarithme	252
9.1.1. Définition et propriétés de la fonction logarithme népérien	252
9.1.2. Graphe de la fonction Log	254
9.1.3. Dérivée logarithmique	255
9.1.4. Logarithme de base $a$	256
9.2. Fonction exponentielle	258
9.2.1. Définition de la fonction exponentielle de base $e$	258
9.2.2. Propriétés	259
9.2.3. Fonction exponentielle de base $a$ ( $a > 0$ )	261
9.3. Fonction puissance	261
9.4. Croissance comparée des fonctions logarithme, exponentielle et puissance	262
9.4.1. Fonctions logarithme et puissance	262
9.4.2. Fonctions exponentielle et puissance	263
9.5. Fonctions circulaires réciproques	265
9.5.1. Fonction Arc sinus	265
9.5.2. Fonction Arc cosinus	267
9.5.3. Fonction Arc tangente	268