

KADA ALLAB

ÉLÉMENTS D'ANALYSE

FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE

1^{re} & 2^e ANNÉES D'UNIVERSITÉ

ÉCOLES SCIENTIFIQUES



Sommaire

I. — Éléments de la théorie des ensembles	13
1.1. <i>Ensembles, opérations élémentaires</i>	13
1.1.1. Parties d'un ensemble	13
1.1.2. Rappel de logique	14
1.1.3. Réunion, intersection	15
1.1.4. Ensemble produit	15
1.1.5. Partition d'un ensemble	16
1.2. <i>Applications</i>	16
1.2.1. Définitions	16
1.2.2. Applications injective, surjective et bijective	17
1.2.3. Image directe et image réciproque d'une partie	18
1.3. <i>Relations dans un ensemble</i>	19
1.3.1. Relation d'équivalence, ensemble quotient	20
1.3.2. Relation d'ordre	21
1.4. <i>Dénombrement</i>	23
1.4.1. Ensembles finis	23
1.4.2. Arrangements	24
1.4.3. Permutations	24
1.4.4. Combinaisons	24
1.5. <i>Puissance des ensembles. Ensembles infinis</i>	27
1.5.1. Puissance	27
1.5.2. Ensembles infinis	27
1.5.3. Comparaison des cardinaux	28
<i>Exercices (5) avec solutions</i>	32
II. — Structures algébriques	38
2.1. <i>Groupe</i> s	38
2.1.1. Définitions	38
2.1.2. Sous-groupe	39
2.1.3. Homomorphisme	40
2.2. <i>Anneaux</i>	40
2.2.1. Définitions	40
2.2.2. Calcul dans un anneau	41
2.2.3. Éléments particuliers	43
2.2.4. Sous-anneau	43
2.2.5. Idéal d'un anneau commutatif	43
2.3. <i>Corps</i>	44
2.3.1. Définitions	44
2.3.2. Propriétés	44
2.3.3. Valeur absolue	45
<i>Exercices (4) avec solutions</i>	45

III. — Nombres réels. Nombres complexes	49
<i>Introduction</i>	49
3.1. Nombres réels	50
3.1.1. Définition axiomatique des nombres réels	51
3.1.2. Construction de $\mathbb{R}$	52
3.1.3. Quelques propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$	63
3.1.4. Nombres algébriques. Nombres transcendants	70
3.1.5. Représentation décimale des nombres réels	71
3.2. Droite réelle achevée	75
3.3. Corps des nombres complexes	76
Exercices (3) avec solutions	81
IV. — Suites numériques	84
4.1. Définitions	84
4.2. Suites convergentes	85
4.3. Théorèmes sur les suites convergentes	89
4.4. Extension aux limites infinies	91
4.5. Suites adjacentes	92
4.6. Suites récurrentes	92
4.7. Suites de Cauchy	95
4.8. Théorème de Bolzano-Weierstrass	97
4.9. Généralisation de la notion de limite	99
Exercices (5) avec solutions	103
V. — Fonctions réelles d'une variable réelle	109
5.1. Généralités	109
5.1.1. Fonction numérique, fonction réelle d'une variable réelle	109
5.1.2. Graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle	109
5.1.3. Fonctions paire, impaire, périodique	110
5.1.4. Fonctions bornées, fonctions monotones	110
5.1.5. Opérations algébriques sur les fonctions	112
5.2. Limites d'une fonction	112
5.2.1. Définitions	112
5.2.2. Unicité de la limite	113
5.2.3. Limite à droite, limite à gauche	114
5.2.4. Cas où x devient infini	114
5.2.5. Limite infinie	115
5.3. Théorèmes sur les limites	115
5.3.1. Relation avec les limites de suites	115
5.3.2. Critère de Cauchy pour les fonctions	116
5.4. Opérations sur les limites	117
5.5. Limite supérieure, limite inférieure	120
5.6. Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Notations de Landau	126
5.6.1. Définitions; propriétés	126
5.6.2. Fonctions équivalentes	127
Exercices (2) avec solutions	133

VI. — Fonctions continues	134
6.1. Définitions	134
6.1.1. Fonctions continues en un point	134
6.1.2. Fonctions continues sur un intervalle	135
6.1.3. Continuité uniforme d'une fonction sur un intervalle	135
6.2. Opérations sur les fonctions continues	137
6.3. Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé	138
6.4. Prolongement par continuité	142
6.5. Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle	143
6.6. Théorèmes du point fixe	146
6.7. Exemple : étude de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$	150
Exercices (3) avec solutions	154
VII. — Fonctions dérivables	155
7.1. Définitions, propriétés	155
7.1.1. Dérivée d'une fonction en un point	155
7.1.2. Dérivée à droite, dérivée à gauche	156
7.1.3. Interprétation géométrique	157
7.1.4. Différentielle	159
7.1.5. Dérivabilité et continuité	160
7.1.6. Dérivée sur un intervalle. Fonction dérivée	160
7.1.7. Opérations sur les fonctions dérivables	162
7.1.8. Maximum, minimum	165
7.2. Théorème de Rolle	166
7.2.2. Théorème des accroissements finis	168
7.2.3. Applications	171
7.2.4. Théorème des accroissements finis généralisés	175
7.3. Formules de Taylor	177
7.3.1. Formules de Taylor	177
7.3.2. Application : recherche d'extrémum	185
7.4. Fonctions convexes	186
7.4.1. Définition	186
7.4.2. Dérivabilité des fonctions convexes	188
7.4.3. Continuité et convexité	191
Exercices (2) avec solutions	193
VIII. — Intégrale de Riemann	197
8.1. Définition de l'intégrale de Riemann	197
8.1.1. Subdivisions	197
8.1.2. Sommes de Darboux	198
8.1.3. Fonctions intégrables. Intégrale de Riemann	202
8.1.4. Théorème de Darboux	203
8.1.5. Sommes de Riemann	208
8.1.6. Intégrale d'une fonction à valeurs complexes	209
8.2. Propriétés de l'intégrale de Riemann	210
8.2.1. Propriétés relatives à l'intervalle de l'intégration	210
8.2.2. Exemples des fonctions intégrables	212
8.2.3. Structure de l'ensemble des fonctions intégrables	215
8.2.4. Propriétés de l'intégrale exprimée par des inégalités	219
8.3. Intégrales et primitives	227
8.3.1. Intégrale fonction de sa limite supérieure (inférieure). Primitives	227
8.3.2. Intégrale indéfinie	231

8.3.3. Formules de la moyenne	233
8.3.4. Procédés généraux d'intégration	238
Exercices (4) avec solutions	247
IX. — Fonctions élémentaires	252
9.1. Fonction logarithme	252
9.1.1. Définition et propriétés de la fonction logarithme népérien	252
9.1.2. Graphe de la fonction Log	254
9.1.3. Dérivée logarithmique	255
9.1.4. Logarithme de base a	256
9.2. Fonction exponentielle	258
9.2.1. Définition de la fonction exponentielle de base e	258
9.2.2. Propriétés	259
9.2.3. Fonction exponentielle de base a ($a > 0$)	261
9.3. Fonction puissance	261
9.4. Croissance comparée des fonctions logarithme, exponentielle et puissance	262
9.4.1. Fonctions logarithme et puissance	262
9.4.2. Fonctions exponentielle et puissance	263
9.5. Fonctions circulaires réciproques	265
9.5.1. Fonction Arc sinus	265
9.5.2. Fonction Arc cosinus	267
9.5.3. Fonction Arc tangente	268
9.6. Fonctions hyperboliques et leurs inverses	270
9.6.1. Fonctions hyperboliques	270
9.6.2. Fonctions hyperboliques réciproques	272
9.7. Polynômes, fonctions rationnelles	274
Exercices (6) avec solutions	282
X. — Développements limités	291
10.1. Développement limité d'ordre n au voisinage 0	291
10.1.1. Définition	291
10.1.2. Unicité	292
10.2. Développements limités usuels obtenus par la formule de Mac Laurin	295
10.3. Opérations sur les développements limités	297
10.3.1. Développements limités obtenus par restriction	297
10.3.2. Opérations algébriques sur les développements limités	297
10.3.3. Développement limité d'une fonction composée	300
10.3.4. Intégration d'un développement limité	301
10.4. Développement limité au voisinage d'un point x_0	304
10.5. Développement limité généralisé	306
10.6. Infiniments petits, infiniments grands	307
Exercices (2) avec solutions	303
XI. — Calcul des primitives	311
11.1. Tableau des primitives usuelles	312
11.2. Changement de variables et intégration par parties dans les intégrales indéfinies	312
11.2.1. Changement de variable	312
11.2.2. Intégration par parties	315

11.3. Primitive d'une fonction rationnelle	315
11.4. Primitive d'une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$	313
11.5. Intégration des fractions rationnelles en e^x	320
11.6. Intégrales abéliennes	321
11.6.1. Recherche des primitives de $R\left[x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right]$	322
11.6.2. Recherche des primitives de $R[x, \sqrt{ax^2+bx+c}]$	322
11.7. Intégrales du type $\int x^a(Ax^b+B)^r dx$	326
Addendum : formes différentielles dans $\mathbb{R}$	327
Exercices (5) avec solutions	332
XII. — Intégrales impropres	338
12.1. Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b[$	338
12.2. Propriétés élémentaires de l'intégrale sur $[a, b[$	340
12.3. Convergence des intégrales des fonctions positives	341
12.4. Critères de comparaison pour les fonctions positives	342
12.5. Critère de convergence de Cauchy	347
12.6. Intégrales absolument convergentes. Intégrales semi-convergentes	347
12.7. Intégrale sur d'autres types d'intervalles	354
12.7.1. Intégrale $\int_a^b f dt$ où $f \in \text{loc} (]a, b])$, $-\infty \leq a$	354
12.7.2. Intégrale $\int_a^b f dt$ où $f \in \text{loc} (]a, b[)$, $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$	355
12.7.3. Généralisation	361
12.8. Changement de variable dans une intégrale impropre	363
12.9. Intégration par parties	365
12.10. Valeur principale de Cauchy	366
Exercices (4) avec solutions	367
XIII. — Séries numériques	370
13.1. Suites de nombres complexes	370
13.2. Définitions. Propriétés élémentaires des séries	371
13.3. Suites et séries	376
13.4. Espace vectoriel des séries numériques	377
13.5. Séries absolument convergentes et semi-convergentes	379
13.6. Séries à termes positifs	380
13.6.1. Condition de convergence	381
13.6.2. Règles de comparaison	382
13.6.3. Comparaison d'une série à termes positifs avec une série géométrique	385
13.6.4. Comparaison avec une intégrale	391
13.6.5. Comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$	382
13.6.6. Autres critères	395

13.7. <i>Séries à termes de signes quelconques</i>	398
13.7.1. Règle d'Abel	398
13.7.2. <i>Séries alternées</i>	400
13.8. <i>Quelques propriétés des séries absolument convergentes et semi-convergentes</i>	404
<i>Exercices (2) avec solutions</i>	410
XIV. — Suites de fonctions	412
14.1. <i>Suites de fonctions</i>	412
14.1.1. <i>Convergence simple d'une suite de fonctions</i>	412
14.1.2. <i>Convergence uniforme</i>	414
14.2. <i>Suites de fonctions continues</i>	419
14.3. <i>Suites de fonctions intégrables</i>	424
14.4. <i>Approximations</i>	426
14.5. <i>Suites de fonctions dérivables</i>	430
<i>Exercices (2) avec solutions</i>	431
XV. — Séries de fonctions	434
15.1. <i>Définitions. Propriétés élémentaires</i>	434
15.2. <i>Convergence uniforme</i>	437
15.3. <i>Convergence normale</i>	439
15.4. <i>Convergence uniforme et propriétés des sommes des séries de fonctions</i>	443
15.4.1. <i>Continuité</i>	443
15.4.2. <i>Intégration</i>	444
15.4.3. <i>Dérivation</i>	445
15.5. <i>Séries entières</i>	449
15.6. <i>Séries de Taylor</i>	459
<i>Exercices (4) avec solutions</i>	466
XVI. — Éléments sur les séries de Fourier	471
16.1. <i>Séries trigonométriques. Système trigonométrique orthogonal. Séries de Fourier</i> ..	471
16.2. <i>Somme partielle de la série de Fourier. Noyau de Dirichlet</i>	475
16.3. <i>Lemme de Riemann</i>	476
16.4. <i>Convergence d'une série de Fourier en un point. Principe de localisation</i>	477
16.5. <i>Problème de la représentation d'une fonction par sa série de Fourier</i>	478
16.6. <i>Développement en série de Fourier des fonctions définies sur un intervalle</i>	484
16.7. <i>Séries de Fourier des fonctions paires ou impaires</i>	489
16.8. <i>Ordre infinitésimal des coefficients de Fourier</i>	492
16.9. <i>Sommation des séries de Fourier au sens de Cesaro. Théorème de Weierstrass</i>	493
16.10. <i>Séries de Fourier sous forme complexe</i>	499
16.11. <i>Convergence en moyenne des séries de Fourier. Égalité de Parseval</i>	501
<i>Exercices (6) avec solutions</i>	506